SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A XII-a

Subiectul 1. Concluzia problemei revine la a arăta că există o funcţie $f : A_1 \cup \dots \cup A_n \to \{0,1\}$ cu restricţia la fiecare A_i surjectivă.

Vom demonstra acest rezultat prin nducţie după n.

Pentru $n = 2$ construcţia este evidentă.

Fie $n \geq 2$ şi $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ mulţimi cu proprietatea din enunţ. Presupunem că am construit funcţia $f_n : A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \to \{0,1\}$ cu proprietatea cerută. . . . . 1 punct

Fie $B = A_{n+1} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Distingem cazurile

i) $|B| \geq 1$ şi $a \in B$. Definim $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ pentru $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, $f_{n+1}(x) = 1$ pentru $x = a$ şi $f_{n+1}(x) = 0$ în rest.

ii) $|B| = 1$. Fie $a \in B$ şi $b \in A_{n+1} \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Definim $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ dacă $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ şi $f_{n+1}(x) = 1 - f_n(b)$ pentru $x = a$.

iii) $B = \emptyset$, ceea ce înseamnă $A_{n+1} \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Dacă restricţia lui f_n la A_{n+1} este surjectivă problema este rezolvată. Să presupunem, fără a pierde generaliatea că $f_n(x) = 0$ oricare ar fi $x \in A_{n+1}$ şi să fixăm un indice $i = 1, 2, \dots, n$ astfel încât $A_{n+1} \cap A_i \neq \emptyset$ Fie $a \in A_{n+1} \cap A_i$. Definim $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ pentru $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \setminus \{a\}$ şi $f_{n+1}(x) = 1$ pentru $x = a$. . . . . 3 puncte

Rămâne să arătâm că f are proprietatea cerută. Pron construcţie, f_{n+1} este surjectivă. Fie $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dacă $a \notin A_j$ atunci $f_{n+1|A_j} = f_{n|A_j}$. Dacă $a \in A_j$, cum $|A_j \cap A_{n+1}| \geq 2$ şi $f_{n+1}(x) = f_n(x) = 0$ pentru orice $x \in A_{n+1} \setminus \{a\}$ rezultă că $f_{n+1|A_j}$ este surjectivă. . . . . 3 puncte

Observaţie: Orice argument de maximalitate care duce la o soluţie a problemei va fi punctat corespunzător. De exemplu, demonstrarea faptului că o colorare poate fi extinsă cu unul sau mai multe elemente, aduce 1-3 puncte în funcţie de completitudinea lui, conform soluţiei de mai sus.

Subiectul 2. a) Fie $a \in (0,1]$. Cum

$$\left| \int_0^a (f(x) - a_n x - b_n) \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^a |f(x) - a_n x - b_n| \mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f(x) - a_n x - b_n| \mathrm{d}x,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^a(f(x)-a_nx-b_n)\mathrm{d}x=0$, deci şirul $\left(\dfrac{a}{2}a_n+b_n\right)_n$ este convergent. În particular şirurile $\left(\dfrac{1}{2}a_n+b_n\right)_n$ şi $\left(\dfrac{1}{4}a_n+b_n\right)_n$ sunt convergente, deci şirurile $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ sunt convergente. . . . . 3 puncte

b) Fie $a=\lim a_n, b=\lim b_n$. Atunci

$$\int_0^1|f(x)-ax-b|\mathrm{d}x\leq\int_0^1|f(x)-a_nx-b_n|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}|a_n-a|+|b_n-b|$$

pentru orice $n\in\mathbf{N}$. Prin trecere la limită obţinem

$$\int_0^1|f(x)-ax-b|\mathrm{d}x=0,$$

iar continuitatea funţiei f atrage concluzia . . . . 4 puncte

Subiectul 3. Fixăm $x\in G$. Dacă $y\in F$ şi k este ordinul lui y, atunci $(xyx^{-1})^k=xy^kx^{-1}=e$, deci $xyx^{-1}\in F$ . . . . 2 puncte

Funcţia $f_x:F\to F$, $f_x(y)=xyx^{-1}$ este injectivă şi cum F este finită, rezultă că f_x este bijectivă . . . . 2 puncte

Dacă $p=|F|$ atunci $f^{[p!]}=1_F$ . . . . 1 punct

Rezultă că $x^{p!}y(x^{p!})^{-1}=y$, pentru orice $y\in F$, deci $x^{p!}y=yx^{p!}$ oricare ar fi $y\in F$. . . . . 2 puncte.

Subiectul 4. Cum $\frac{n+1}{2}\in\mathbf{N}$ rezultă că n este impar. Fie k ordinul lui 1 în grupul $(A,+)$. Cum $k|n$, rezultă k impar şi $k\geq3$, deci $(2,k)=1$. Prin urmare există $u,v\in\mathbf{Z}$ cu $u>0$ şi $2u+kv=1$. Obţinem $(1+1)(1+1+\cdots+1)=1$, deci $1+1$ este inversabil . . . . 2 puncte

b) Considerăm funcţia $f:A\to A$, $f(x)=x^2$. Deoarce egalitatea $a=-a$ $\leftrightarrow$ $2a=0$ sau $a=0$, rezultă că $a\neq-a$ pentru orice $a\in A^*$ . . . . 1 punct

Obţinem că pentru orice $b\in Imf$, $b\neq0$ avem $|f^{-1}(b)|\geq2$ şi $|f^{-1}(0)|\geq1$. Cum

$$n=\sum_{b\in Im\,f}|f^{-1}(b)|\geq\frac{n-1}{2}\cdot2+1=n,$$

rezultă că $|f^{-1}(b)|=2$ pentru orice $b\in Im\,f$ cu $b\neq0$ şi $|f^{-1}(0)|=1$.

. . . . 1 punct

Deci, pentru orice $x,y\in A$ din $x^2=y^2$ rezultă $x=\pm y$ . . . . 1 punct

Vom arăta că A nu are divizori ai lui zero. Considerăm $x, y \in A$ cu $xy = 0$. Cum $(yx)^2 = yxyx = 0$ rezultă $yx = 0$. Alegem $a = 2^{-1}(x + y)$ şi $b = 2^{-1}(x - y)$. Cum 2^{-1} comută cu orice element din A şi $a^2 = b^2 = 4^{-1}(x^2 + y^2)$, rezultă $a = \pm b$, deci $x = 0$ sau $y = 0$. A este deci inel integru, aşadar corp. .... 2 puncte